SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI	ĐỀ THI MẪU TUYỂN SINH VÀO 10 THPT
Trường THPT Lương Văn Can	**Năm học: 2020 - 2021**
- - - - - - - - - - - - - - - - -	Môn thi: **TOÁN**
	Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1 (2,0 điểm).
Cho hai biểu thức $A = \dfrac{6-2\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}$ và $B = \left(\dfrac{1}{3-\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3+\sqrt{x}}\right) \cdot \dfrac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, (với $x > 0$; $x \neq 9$).

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

2) Rút gọn biểu thức B.

3) Tìm các giá trị của x để $P = A.B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 2 (2,5 điểm).

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*
Quãng đường AB dài 120 km. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 12 km nên đến B trước ô tô thứ hai 30 phút. Tính vận tốc của ô tô thứ nhất.

2) Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài 8 m, chiều rộng 6 m và chiều cao 3,8 m. Thầy hiệu trưởng muốn thuê người quét sơn trần phòng học và bốn bức tường. Người thợ sơn báo giá sơn trọn gói 68 000 VNĐ/m^2. Biết rằng tổng diện tích các cửa không cần sơn là 6,8 m^2. Tính số tiền thầy hiệu trưởng cần trả cho người thợ sơn.

Bài 3 (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y+1} = 4 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y+1} = 3. \end{cases}$

2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d)\colon y = 2(m+1)x - m + 4$ và parabol $(P)\colon y = x^2$.

   (a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

   (b) Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của (d) và (P). Tìm các giá trị của m sao cho biểu thức $Q = \dfrac{y_1 + y_2}{x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1)}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 4 (3,0 điểm).
Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt BC và (O) lần lượt tại F và $K(K \neq A)$. Gọi L là hình chiếu vuông góc của D lên AB.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEDC$ nội tiếp và $BD^2 = BL.BA$.

b) Gọi J là giao điểm của KD và (O) $(J \neq K)$. Chứng minh $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

c) Gọi I là giao điểm của BJ và ED. Chứng minh tứ giác $ALIJ$ nội tiếp và I là trung điểm của ED.

Bài 5 (0,5 điểm).
Cho các số x, y, z thỏa mãn $0 \leq x, y, z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1+yz} + \frac{y}{1+zx} + \frac{z}{1+xy} \leq 2.$$

- - - - - – - - - - - **HẾT** - - - - - - - - - - - -

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1) Khi $x = 6 \Rightarrow A = \dfrac{6 - 2\sqrt{16}}{2 + 3\sqrt{16}} = -\dfrac{1}{7}$

2) Với $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9. \end{cases}$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{3+\sqrt{x}-3+\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3) Ta có $P = \dfrac{2(3-\sqrt{x})}{2+3\sqrt{x}} . \dfrac{2}{3-\sqrt{x}} = \dfrac{4}{2+3\sqrt{x}}$.
Vì $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow 2 + 3\sqrt{x} > 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{4}{2+3\sqrt{x}} < 2 \Rightarrow 0 < P < 2$.
Hơn nữa $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P = 1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{2+3\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow 2 + 3\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{9}$ (thoả mãn).

Bài 2.

1) Đổi 30 phút $= \dfrac{1}{2}$ giờ.
Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là x km/giờ (điều kiện $x > 12$).
Khi đó vận tốc của ô tô thứ hai là $(x - 12)$ km/giờ.
Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường là $\dfrac{120}{x}$ giờ.
Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường là $\dfrac{120}{x-12}$ giờ.
Theo đề bài ra ta có phương trình

$$\begin{aligned} & \frac{120}{x} + \frac{1}{2} = \frac{120}{x-12} \\ \Leftrightarrow\ & 240(x-12) + x(x-12) = 240x \\ \Leftrightarrow\ & 240x - 2880 + x^2 - 12x = 240x \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 12x - 2880 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x = 60 \text{ (nhận)} \\ x = -48 \text{ (loại)}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là 60 km/giờ.

2) Do giả thiết suy ra diện tích cần quét sơn là

$$(6 \cdot 8 + 2 \cdot 8 \cdot 3{,}8 + 2 \cdot 6 \cdot 3{,}8) - 6{,}8 = 147{,}6 \ \left(\mathrm{m}^2\right).$$

Suy ra số tiền cần phải trả người thợ sơn là $147{,}6 \cdot 68000 = 10036800 \ \left(\text{đồng}\right)$.

Vậy số tiền cần phải trả là 10 036 800 đồng.

Bài 3.

1) Xét hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y+1} = 4 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y+1} = 3, \end{cases}$ điều kiện $x \neq 0; y \neq -1$.

Đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{x} \\ b = \dfrac{1}{y+1}. \end{cases}$

Ta được hệ $\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 2 \\ \dfrac{1}{y+1} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0. \end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

2) (a) Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 = 2(m+1)x - m + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0 \quad (1).$$

Ta có

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m-4) = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0, \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, nên đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

(b) Vì $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là hai giao điểm của d và (P), nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và $y_1 = 2(m+1)x_1 - m + 4$, $y_2 = 2(m+1)x_2 - m + 4$.

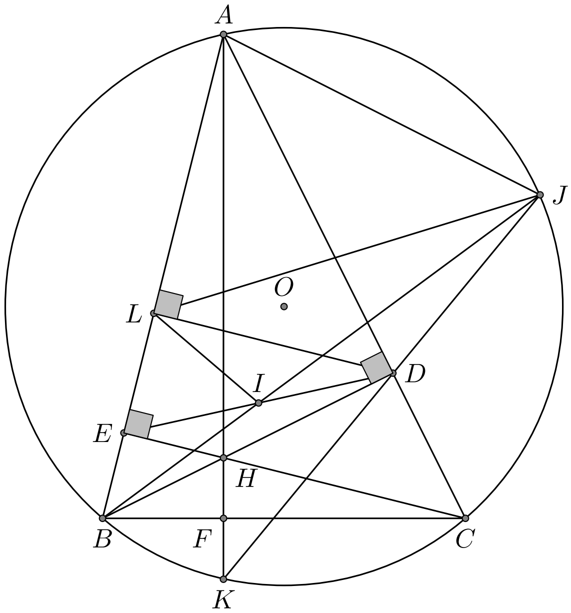
Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = m - 4. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2(m+1)(x_1 + x_2) - 2m + 8}{x_1 + x_2 - 2x_1 x_2} \\ &= \frac{2(m+1)(2m+2) - 2m + 8}{2m + 2 - 2(m-4)} \\ &= \frac{2m^2 + 3m + 6}{5} \\ &= \frac{2\left[\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16}\right]}{5} \\ &\geq \frac{39}{40} \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của Q bằng $\dfrac{39}{40}$ khi $m = -\dfrac{3}{4}$.
Vậy $m = -\dfrac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.



a) Xét tứ giác $BEDC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$.
Vậy tứ giác $BEDC$ có hai đỉnh E, D kề nhau cùng nhìn BC dưới góc vuông do đó tứ giác $BEDC$ nội tiếp.
Xét $\triangle ABD$ vuông tại D có DL là đường cao nên ta có $BD^2 = BL.BA$.

b) Xét tứ giác $AEHD$ có

$$\begin{cases} \widehat{AEH} = 90^\circ \\ \widehat{ADH} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 180^\circ.$$

Vậy tứ giác $AEHD$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EAH} = \widehat{EDH} \Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{BDE}$ (1).
Mặt khác $\widehat{BAK} = \widehat{BJK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BK) (2).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BJK} = \widehat{BDE}$.

c) - Xét $\triangle BDJ$ và $\triangle BID$ có

$$\begin{cases} \widehat{B} \quad \text{chung} \\ \widehat{IDB} = \widehat{DJB} \quad (\text{do} \quad \widehat{BJK} = \widehat{BDE}) \end{cases} \Rightarrow \triangle BDJ \sim \triangle BID.$$

Khi đó ta có $\dfrac{BD}{BJ} = \dfrac{BI}{BD} \Rightarrow BD^2 = BI \cdot BJ$ (3).
Mặt khác theo ý (a) ta có $BD^2 = BL \cdot BA$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $BI \cdot BJ = BL \cdot BA \Rightarrow \dfrac{BI}{BL} = \dfrac{BA}{BJ}$.
*Xét $\triangle BLI$ và $\triangle BJA$ có

$$\begin{cases} \widehat{LBI} \quad \text{chung} \\ \dfrac{BI}{BL} = \dfrac{BA}{BJ} \end{cases} \Rightarrow \triangle BLI \sim \triangle BJA.$$

Khi đó $\widehat{BLI} = \widehat{BJA} \Rightarrow \widehat{BLI} = \widehat{IJA} \quad (I \in BJ)$.
Xét tứ giác $ALIJ$ có $\widehat{BLI} = \widehat{IJA}$ nên tứ giác $ALIJ$ nội tiếp.

- Do tứ giác $ALIJ$ nội tiếp nên $\widehat{ELI} = \widehat{AJI}$.
  Ta có

$$\begin{cases} \widehat{AJI} = \widehat{ACB} \\ \widehat{ACB} = \widehat{AED} \\ \widehat{AED} = \widehat{LEI} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ELI} = \widehat{LEI} \Rightarrow \triangle LIE \quad \text{cân tại } I \Rightarrow IL = IE.$$

  Xét $\triangle LDE$ vuông tại L có

$$\begin{cases} \widehat{DLI} + \widehat{ILE} = 90^\circ \\ \widehat{LDI} + \widehat{LEI} = 90^\circ \\ \widehat{ELI} = \widehat{LEI} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DLI} = \widehat{LDI}.$$

  Suy ra $\triangle LID$ cân tại I nên $IL = ID$.
  Mặt khác $IL = IE$ suy ra $ID = IE$, mà $I \in DE$ nên I là trung điểm của DE.

Bài 5. Từ $0 \le x, y, z \le 1 \Rightarrow yz(1-x) \ge 0 \Rightarrow 1 + yz \ge 1 + xyz > 0$.
Suy ra $VT \le \dfrac{x}{1+xyz} + \dfrac{y}{1+xyz} + \dfrac{z}{1+xyz} = \dfrac{x+y+z}{1+xyz}$.
Do $0 \le x, y, z \le 1$ nên

$$\begin{aligned} & (1-x)(1-y) + (1-z)(1-xy) \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - x - y + xy + 1 - xy - z + xyz \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & x + y + z \le xyz + 2. \end{aligned}$$

Suy ra, $VT \le \dfrac{xyz+2}{1+xyz} = 1 + \dfrac{1}{1+xyz} \le 1 + 1 = 2$.
Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = 1, z = 0$ hoặc các hoán vị.